Estudio local y global del problema de valor inicial asociado a la ecuación de Klein Gordon

David A. Sumire-QQuenta[*] , Aldo Mendoza Uribe[†]
Recibido 3 de julio de 2015, aceptado 9 de agosto de 2015
Received: July 3, 2015 Accepted: August 9, 2015

RESUMEN

En la presente investigación se estudia el problema de Cauchy o de valores iniciales de la siguiente ecuación diferencial parcial: $u_{tt} - \triangle u + mu = g(u)$ donde $g \in C(R,R)$ y $t>0$; y las siguientes condiciones iniciales: $u(x,0)=\phi(x)$ y $u_t(x,0)=\psi(x)$, $x \in R^n$ donde ϕ y ψ son funciones dadas. La ecuación en estudio es conocida como la ecuación de Klein-Gordon, y fue derivada como un modelo para describir aproximadamente la propagación (unidireccional) de ondas largas de agua en un canal de poca profundidad. Se considera los casos cuando $g(u) = 0$ y en particular cuando $g(u)=a|u|^{\alpha}u$, $a>0$, $\alpha>0$, con $(n-2)\alpha\leq 2$ y fundamentalmente se estudia la existencia local de las soluciones, la unicidad y la dependencia continua en el dato inicial y la existencia global de las soluciones y se analizará la "blow-up" en tiempo finito en el espacio $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Palabras clave: Ecuación de Klein Gordon; existencia y unicidad de soluciones; dependencia en el dato inicial; el espacio $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

ABSTRACT

In the present research, we studied the Cauchy problem or initial values of the following partial differential equation: $u_{tt} - \triangle u + mu = g(u)$ where $g \in C(R, R)$ and $t> 0$; and the following initial conditions: $u(x, 0) = \varphi(x)$ and $u_t(x, 0) = \psi(x)$, where φ

* Magister. Facultad de Ingeniería y Arquitectura. Universidad Peruana Unión. Email: dsumire@upeu.edu.pe
† Doctor. Facultad de Ciencias. Universidad Agraria La Molina.

and ψ $x \in R^n$ are given functions. The study equation is known as the Klein-Gordon equation, and was derived as a model to aproximately describe the propagation (unidirectional) of long wateer waves in a shallow channel. Cases are considered when g (u) = 0 particularly when $g(u)=a|u|\alpha u$, $a>0$, $\alpha>0$, with $(n-2)\alpha\leq 2$ and we fundamentally study the local existence of solutions, uniqueness, and continuous dependence on the initial data and the global existence of solutions; and the "blow-up" will be analized in finite time in space $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Keywords: Klein Gordon equation; existence and uniqueness of solutions; dependence on the initial data; the space $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

INTRODUCCIÓN

La importancia de la ecuación de Klein Gordon no fue apreciada por varias décadas, sin embargo, la aparición de la misma ecuación como un modelo básico para ondas de sistemas físicos diversos, despertó el interés de físicos y matemáticos. El objetivo de la presente investigación es estudiar el problema de Cauchy o de valores iniciales de la siguiente ecuación diferencial parcial: $u_{tt} - \triangle u + mu = g(u)$ donde $g \in C(R,R)$ y $t>0$; y las siguientes condiciones iniciales: $u(x,0)=\phi(x)$ y $u_t(x,0)=\psi(x)$, $x \in R^n$ donde ϕ y ψ son funciones dadas, con $g(u)=a|u|^\alpha u$, $a>0$, $\alpha>0$ y $(n-2)\alpha\leq 2$ en el espacio $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Las preguntas fundamentales que se formularon en ésta investigación para el logro del objetivo fueron: (1) La existencia local de las soluciones. Se trata de demostrar que existen $t \in [0,T]$ y una función continua u definida en $[0,T]$, tal que el problema en mención sea satisfecho. (2) Unicidad. Consiste en demostrar que existe a lo más una solución de (1) en alguna vecindad del origen. (3) Dependencia continua en el dato inicial. Ésta pregunta consiste en establecer si es posible la continuidad u(0) tiende a u en topologías apropiadas. En el caso lineal la continuidad de ésta aplicación es esencialmente automática. En el caso no lineal, la pregunta de continuidad puede ser un problema difícil de responder. Es importante observar que la razón del interés por el estudio de la continuidad u(0) tiende a u viene del hecho que las ecuaciones diferenciales que se estudian provienen de problemas físicos y los datos iniciales son cantidades medidas en laboratorios y por lo tanto están sujetas a errores experimentales. Desde este punto de vista la pregunta de la dependencia en el dato inicial consiste en demostrar que si los errores de medida son pequeños entonces la solución varía poco. El estudio (1), (2) y (3) es denominado el problema básico. En caso valgan la existencia local, unicidad y continuidad en relación al dato inicial el problema es llamado bien formulado localmente. Si la respuesta a por lo menos una de las tres preguntas fuera negativa el problema se denomina mal formulado. Finalmente, si $u_{tt} = \triangle u - mu + a|u|^\alpha u$, está definida en $[0,\infty[$ y (1),(2) y (3) son válidas en [0,T] para T>0 diremos que el problema es bien colocado globalmente.

Método

El método que se empleó es el de las leyes conservadas. Los requisitos mínimos para realizar la investigación son, tener conocimientos de la teoría de los semigrupos y grupos de operadores, operadores m-disipativos, transformadas de Fourier y sus diversas propiedades en los espacios de Hilbert, la teoría de las distribuciones y los espacios de Sobolev, muy utilizados en este tipo de estudio especializado en matemáticas puras.

Funcionales en $H_0^1(\Omega)$

En ésta sección Ω es algún subconjunto abierto de R^n. Consideramos la función $g \in C(R,R)$ tal que $0 \leq \alpha < \infty$ y $C < \infty$:

$$g(0) = 0$$

$$|g(x)-g(y)| \leq C(|x|^\alpha+(|y|^\alpha)|x-y|, \text{ para todo } x,y \in R$$

Se observa, la aplicación en el caso $g(x) = a|x|^\alpha x$, $a\neq 0$, $\alpha>0$

Proposición

Supongamos que g satisface 2.1, con $(n-2)\alpha \leq 2$ Entonces g es continua lipschitz de subconjuntos acotados de $H_0^1(\Omega)$ a $L^2(\Omega)$.

Existencia local

Dado $(\varphi,\psi) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ buscamos T>0 y u una solución de:

$$u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T], H^{-1}(\Omega));$$

$$u_{tt} - \Delta u + mu = g(u), \text{ para todo } t \in [0,T];$$

$$u(0) = \varphi \text{ y } u_t(0) = \psi$$

El problema de valor inicial en mención lo traducimos en forma vectorial:

$$\partial t U(t) = AU(t) + F(U(t))$$

$$U(0) = \Phi$$

Donde $U(t) = (u,v) = (u, \partial_t u)$, $\Phi = (\varphi,\psi)$, $A(u,v) = (v,\Delta u\text{-}mu)$, y $F(U(t)) = (0,g(u)) = (0, a|u|^\alpha u)$. Así se demuestra que el problema de valor inicial, planteado arriba, es localmente bien formulado en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Lema

$T>0$ y $\Phi \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Sea $u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T], H^{-1}(\Omega))$;

Luego u es solución del problema de valor inicial si y solo si $U = (u, \partial tu)$ es solución del problema vectorial planteado arriba y se define por:

$$U(t) = e^{tA}\Phi + \int e^{(t-s)A}(0, a|u(s)|^{\alpha}u(s))ds, \text{ para todo } t \in [0,T]$$

Existencia global

Estableceremos aquí dos tipos de resultados. Primero mostramos que si g satisface ciertas condiciones para $|x|$ grande, entonces todas las soluciones del problema de valores iniciales son globales (es decir, independencia del dato inicial). En otro espíritu, algunos resultados prueban que si g satisface ciertas condiciones para $|x|$ pequeño, entonces todas las soluciones del problema en mención con dato inicial pequeño son globales. Empecemos con el siguiente resultado (el principio del máximo).

Proposición

Suponga que existe $C < \infty$ tal que $G(x) \leq C|x|^2$ para todo $x \in R$. Entonces para todo $\Phi \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, luego tenemos $T(\Phi) = \infty$.

Proposición

Suponga que existe $\mu < \lambda + m$ y $\beta > 0$ tal que $2G(x) \leq \mu|x|^2$ para $|x| \leq \beta$, entonces existe δ, $K > 0$ tal que si $||(\varphi,\psi)||_s \leq \delta$, tenemos $T(\varphi,\psi) = \infty$ y la correspondiente solución de U satisface:

$$Sup_{t\geq 0}||(u(t),u_t(t))||_s \leq K||(\varphi,\psi)||_s, \text{ con } s = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

Resultados y discusión

Se obtuvieron los siguientes resultados, luego de hacer un estudio minucioso del tema de investigación acerca del estudio local y global problema de valor inicial asociado a la ecuación de Klein Gordon.

Resultados 1

Para lograr demostrar la existencia y unicidad de las soluciones a nivel local se tuvo que construir, en primer lugar, la ecuación integro-diferenciable según como lo define la teoría de los semigrupos y a continuación realizar un estudio profundo acerca de ésta integral mencionada en el lema para concluir en la existencia y unicidad en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

Resultados 2

Por el método de las leyes conservadas se verifica la conservación de la energía, esto es $E(u(t),u_t(t)) = E(\varphi,\psi)$ y con la $g(u) = a|u|^{\alpha}u$ como la parte no lineal del problema en estudio, se logra demostrar la existencia global entonces $T(\varphi,\psi) = \infty$ y se produce el blow-up gracias a la no linealidad de g(u) en el espacio $H_o^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Resultados 3

Las técnicas modernas de investigación como el uso de los espacios de Sobolev del tipo $H_o^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, teoría de distribuciones, los semigrupos en la s investigaciones de las EDPs son muy útiles a comparación de las tradicionales ya obsoletas del siglo pasado y ayudan a entender otras ecuaciones como podría ser el estudio local y global de la ecuación de Schrödinger, KdV, BO entre otras que han surgido en estos últimos años.

Conclusiones

Se logró resolver el problema de valor inicial para el caso local y global en el espacio: $H_o^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, demostrándose que el problema si está bien puesto. Todos los investigadores matemáticos de vanguardia del área de ecuaciones diferenciales parciales conocen estas técnicas modernas de investigación utilizando las distribuciones y los espacios de Sobolev, por lo tanto, todo joven universitario que desea ingresar a este mundo debe reunir los prerrequisitos en conocimientos para poder entender e investigar en esta línea de la matemática de vanguardia.

Agradecimientos

Este trabajo de investigación se desarrolló bajo la tutela de los doctores Dr. Aldo Mendoza Uribe y Juan Montealegre Scott, docentes investigadores de matemáticas de las Universidades Agraria la Molina y la Pontificia Universidad Católica del Perú. Además, deseo agradecer al área académica y financiera de la Universidad Peruana Unión por haberme brindado el apoyo económico por los gastos desarrollados en la presente investigación.

Referencias

Brezis, H. (1983), *Analyse fonctionnelle, théorie et applications (pp. 1-532). Masson, Paris.*

Cazenave, T. (1985). *Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein Gordon equations, al of Scientific Communications Journal Funtional Analytical, 60, 36-55.*

Cazenave, T. (1998). *An Introduction to semilinear evolution equation . (3rd ed.).New York: Clarendon Press, Oxford, (Chapter 3,4,5).*

Iorio, R.J. (1995), *Introducao as Equacoes de Evolucao nao Lineares (pp. 1-432). Brasil: IMPA.*

Iorio, R.J. (1990), *KdV,BO and friends in weightedSobolev Spaces. Funtional Analytical Methods for PDE. es (pp. 1-1450). London.*

Van der Geer, J., Hanraads, J. A. J., & Lupton R. A. (2000). *The art of writing a scientific article. Journal of Scientific Communications, 163, 51-59.*